1. Potenza di un numero reale con esponente intero

Sia a un numero reale ed n un numero intero. Diamo la seguente definizione:

Se n è un numero intero maggiore di 1, *si chiama* ***potenza n-esima*** *del numero reale a, il prodotto di n fattori uguali ad a, cioè:*

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \ \text{volte}}$$

esempio $\qquad 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad ; \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$

Se $n = 1$, si pone

$$a^1 = a\,;$$

esempio $\qquad 6^1 = 6 \qquad ; \qquad \left(\frac{5}{3}\right)^1 = \frac{5}{3}$

se $n = 0$ ed $a \neq 0$, si pone:

$$a^0 = 1;$$

esempio $\qquad 5^0 = 1 \qquad ; \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

se n è intero positivo ed $a \neq 0$, si pone:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

esempio $\qquad 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \;; \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

mentre se $a = 0$ ed $n = 0$, al simbolo 0^0 non si attribuisce alcun significato.

Per le potenze con esponenti interi (positivi o negativi o nulli) valgono i cinque teoremi fondamentali:

Teorema 1.1 ***Il prodotto di potenze aventi la stessa base è uguale alla potenza della stessa base con esponente la somma degli esponenti; cioè:***

$$a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}.$$
$$2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^2 = 2^{3+5+2} = 2^{10}$$

<u>Teorema 1. 2</u>. ***Il quoziente di potenze aventi la stessa base è uguale alla potenza della stessa base con esponente la differenza degli esponenti; cioè:***

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad \text{oppure} \qquad a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$3^7 : 3^4 = 3^{7-4} = 3^3 = 27$$

<u>Teorema 1. 3</u>. ***La potenza di una potenza è uguale alla potenza della stessa base con esponente il prodotto degli esponenti; cioè:***

$$(a^{m})^{n} = a^{m \cdot n}.$$

$$\left(2^3\right)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$$

<u>Teorema 1.4</u>. ***Il prodotto di potenze aventi BASE DIVERSA ma uguale esponente e uguale ad una potenza che ha per base il prodotto delle basi ed esponente lo stesso esponente***

$$a^{n} \cdot \mathrm{b}^{n} = (a \cdot \mathrm{b})^{n}.$$
$$2^3 \cdot 5^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$$

<u>Teorema 1.4</u>. ***Il quoziente di potenze aventi BASE DIVERSA ma uguale esponente e uguale ad una potenza che ha per base il quoziente delle basi ed esponente lo stesso esponente***

$$a^{n} : \mathrm{b}^{n} = (a : \mathrm{b})^{n}$$
$$2^3 : 5^3 = (2:5)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

<u>Teorema 1.1</u>. ***La potenza del prodotto di due o più numeri reali è uguale al prodotto delle potenze dei fattori; cioè:***

$$(a \cdot b \cdot c)^{n} = a^{n} \cdot b^{n} \cdot c^{n}$$
$$(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$$

<u>Teorema 1.2</u>. ***La potenza del quoziente di due numeri reali è uguale al quoziente delle potenze del dividendo e del divisore, cioè:***

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}$$

Si possono inoltre dimostrare anche i due seguenti teoremi che ci limitiamo ad enunciare:

Teorema 1.6. ***Se a e b sono due numeri reali positivi ed n un numero intero positivo, allora si ha:***

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad a^n = b^n.$$

Teorema 1. 7. ***Se a e b sono due numeri reali positivi ed n un numero intero positivo, allora si ha:***

$$a > b \qquad \Leftrightarrow \qquad a^n > b^n$$

$$a < b \qquad \Leftrightarrow \qquad a^n < b^n$$

Il concetto di potenza di numero reale che abbiamo considerato per il solo esponente intero, si può estendere al caso dell'esponente frazionario con la condizione ***che la base sia sempre* positiva.**

Per giustificare questa estensione del concetto di potenza basta ricordare che ogni numero positivo a può assumere la forma di radicale apparente con indice n arbitrario. Ad esempio, prendendo 3 come indice, si ha:

$$a = \sqrt[3]{a^3}\,, \qquad\qquad a^2 = \sqrt[3]{a^6}\,, \quad \ldots\ldots\ldots$$

ed anche:

$$a^{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{a^3}\,, \qquad\qquad a^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{a^6}, \quad \ldots\ldots\ldots$$

Così si vede che la potenza di un numero positivo a, con esponente formato da una frazione apparente $\frac{m}{n}$, equivale ad un radicale di indice n (denominatore) e radicando uguale alla potenza di a con esponente m (numeratore). Ritenendo valida questa trasformazione anche per un esponente frazionario qualunque, si possono dare le seguenti definizioni:

La potenza di un numero reale positivo a, con esponente frazionario positivo, è il radicale aritmetico che ha per indice il denominatore e per radicando la potenza di base a ed esponente il numeratore.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Esempi: $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{5}{3}\right)^4}$

La potenza di un numero reale a positivo, con esponente frazionario negativo, è il Reciproco della stessa potenza con esponente cambiato di segno.

Si ha cioè:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \, .$$

Esempi: $2^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{4}{7}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{3}{5}\right)^4}$

<u>Osservazione</u>: quando l'esponente è razionale, la base deve necessariamente essere non negativa perché in caso contrario si potrebbero ottenere scritture prive di significato (come radici di indice pari di numeri negativi). Viceversa un radicale si può sempre scrivere sotto forma di potenza con esponente frazionario il cui denominatore è l'indice del radicale e il numeratore l'esponente del radicando.

$(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-27)} = -3$ ma $(-27)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{729 =} +3$

AVENDO QUINDI RISULTATI AMBIGUI

Poniamoci adesso la domanda: possiamo definire la potenza di un numero reale *a* quando l'esponente è un numero irrazionale? Cioè hanno significato le scritture del tipo

$3^{\sqrt{2}}$ oppure $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\sqrt{3}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\sqrt{3}}$

La risposta è affermativa solo se $a \geq 0$ Valgono tutte le proprietà viste